



Fiche de révision personnalisée

Consultation en visio

Maxence Boujeon

Le mercredi 15 juillet

Cette fiche de révision personnalisée a été générée par Arcadia, l'IA de Lyon Maths Prépa, à partir des consultations en visio de la journée. Elle récapitule les notions scientifiques abordées pour faciliter vos révisions.

1. Simplification de racines imbriquées

Pour simplifier une expression de la forme $\sqrt{\alpha + \beta\sqrt{\gamma}}$, on pose l'hypothèse qu'elle vaut $a + b\sqrt{\gamma}$ où a, b sont des rationnels à déterminer. On élève au carré :

$$(a + b\sqrt{\gamma})^2 = a^2 + b^2\gamma + 2ab\sqrt{\gamma}.$$

On identifie les coefficients rationnel et irrationnel avec α et β , ce qui donne un système :

$$a^2 + b^2\gamma = \alpha, \quad 2ab = \beta.$$

Exemple : $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = 1 + \sqrt{x-1}$ (valable pour $x \geq 1$).

2. Identités remarquables et forme canonique

Le développement d'une somme de carrés est

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz).$$

Pour un polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), la forme canonique s'obtient par complétion du carré :

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ apparaît naturellement ; son signe détermine la position du sommet de la parabole.

3. Combinatoire et coefficients binomiaux

On distingue trois situations de dénombrement :

- Tirages avec remise : n^p .
- Arrangements (sans remise, ordre significatif) : $\frac{n!}{(n-p)!}$ avec $p \leq n$.
- Combinaisons (sans remise, ordre non significatif) : $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

L'identité de Pascal s'obtient en écrivant les coefficients binomiaux sous forme factorielle et en ramenant au même dénominateur :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Le triangle de Pascal permet de visualiser ces relations.

4. Congruences

On dit que $a \equiv b \pmod{m}$ si m divise $a - b$. Les congruences sont compatibles avec les opérations arithmétiques :

$$a \equiv b \pmod{m}, \quad c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow \begin{cases} a + c \equiv b + d \pmod{m}, \\ ac \equiv bd \pmod{m}, \\ a^k \equiv b^k \pmod{m}. \end{cases}$$

5. Nombres complexes

Un nombre complexe s'écrit $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$. Son conjugué est $\bar{z} = a - ib$. Les opérations se font en développant et en regroupant les parties réelle et imaginaire. Module et argument permettent l'écriture polaire :

$$z = |z|e^{i\theta}, \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \theta = \arg(z).$$

6. Trigonométrie et exponentielles complexes

Pour factoriser une somme du type $1 + e^{i\theta}$, on factorise par l'exponentielle de la moitié de l'angle :

$$1 + e^{i\theta} = e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}) = 2 \cos(\theta/2) e^{i\theta/2}.$$

Les fonctions arcsin, arccos, arctan sont définies sur des intervalles canoniques :

- arcsin : $[-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$,
- arccos : $[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$,
- arctan : $\mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$.

Leurs dérivées sont

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

7. Fonctions hyperboliques

Les fonctions hyperboliques sont définies par

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

Elles vérifient les mêmes relations d'addition que les fonctions trigonométriques circulaires mais sans les signes alternés du i .

8. Division euclidienne de polynômes

Étant donné un polynôme P et un diviseur D de degré 1 (par exemple $x - a$), il existe un unique quotient Q et un reste R (de degré strictement inférieur à celui de D) tels que

$$P(x) = (x - a)Q(x) + R.$$

Le reste s'obtient par évaluation : $R = P(a)$. Pour un diviseur de degré 2, le reste est de la forme $\alpha x + \beta$.

9. Matrices et espaces vectoriels

Le produit de deux matrices A (de taille $m \times n$) et B (de taille $n \times p$) est défini uniquement si le nombre de colonnes de A égale le nombre de lignes de B . L'élément (i, j) du produit est la somme des produits des éléments de la i -ème ligne de A par ceux de la j -ème colonne de B .

Dans une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ d'un espace vectoriel de dimension 2, les coordonnées d'un vecteur u sont les uniques scalaires α, β tels que

$$u = \alpha e_1 + \beta e_2.$$

On résout le système linéaire obtenu en identifiant les composantes.

10. pH et équilibre de l'eau

On définit

$$\text{pH} = -\log_{10}[\text{H}_3\text{O}^+].$$

À 25°C, le produit ionique de l'eau vaut

$$K_e = [\text{H}_3\text{O}^+][\text{HO}^-] = 10^{-14}.$$

Ainsi

$$[\text{HO}^-] = \frac{10^{-14}}{[\text{H}_3\text{O}^+]}.$$

Un pH inférieur à 7 correspond à une solution acide ($[\text{H}_3\text{O}^+] > [\text{HO}^-]$), un pH supérieur à 7 à une solution basique.

11. Tableau d'avancement et réactif limitant

Pour une réaction $\sum \nu_i A_i = 0$, le tableau d'avancement relie les quantités initiales, l'avancement x et les quantités à l'équilibre. Le réactif limitant est celui qui s'épuise le premier ($n_i^{\text{final}} = 0$). L'avancement final x_f est déterminé par la plus petite valeur positive compatible avec les quantités initiales et les coefficients stœchiométriques.

12. Conductivité et constante d'équilibre

La conductivité d'une solution est

$$\sigma = \sum_i \lambda_i c_i,$$

où λ_i est la conductivité molaire ionique et c_i la concentration de l'espèce i .

Pour une réaction $\sum \nu_i A_i = 0$, la constante d'équilibre s'écrit

$$K_c = \frac{\prod \left(\frac{[A_i]}{c_0} \right)^{\nu_i(\text{produits})}}{\prod \left(\frac{[A_i]}{c_0} \right)^{\nu_i(\text{réactifs})}},$$

où les concentrations des solides purs et du solvant (eau) ne figurent pas (activité égale à 1).

La constante d'acidité K_a d'un couple HA/A^- est la constante d'équilibre de la réaction

